



Занятие №5. Технология подготовки учащихся к овладению решения задач с параметрами комбинированными методами.

Прокофьев Александр Александрович,

Зав.каф. ВМ-1, НИУ МИЭТ

Содержание курса

№	Тема занятий
1	Основные структурные изменения и особенности проведения государственной аттестации учащихся в 2015. Технология подготовки учащихся к овладению алгебраическими методами решения задач с параметрами.
2	Технология подготовки учащихся к овладению функциональными методами решения задач с параметрами.
3	Технология подготовки учащихся к овладению функционально-графическими методами решения задач с параметрами.
4	Технология подготовки учащихся к овладению геометрическими методами решения задач с параметрами.
5	Технология подготовки учащихся к овладению решения задач с параметрами комбинированными методами.
Итоговая аттестация	
По результатам посещаемости и успешности выполнения контрольных работ.	

Содержание занятия

- О комбинированных методах решения задач с параметрами
- Решение задач разными методами в литературе для подготовки к ЕГЭ 2015 (проф. уровень)
- Технология подготовки учащихся к овладению комбинированными методами решения задач с параметрами, решение одной задачи разными методами
- Печатные и электронные ресурсы.

О комбинированных методах решения задач с параметром

Метод решения задачи с параметром можно назвать **комбинированным**, если на разных этапах решения задачи приходится использовать разные методы:

- алгебраический + (графический или геометрический);
- аналитический = (алгебраический + функциональный) + (графический или геометрический);
- графический (с применением производной) + алгебраический;
- алгебраический + графический + алгебраический;
- алгебраический + графический образ (!).

Можно также классифицировать по использованию в решении в том или ином порядке разделов математики: алгебра + математический анализ + геометрия.

Часто подобные задачи сложны и специфичны!

О комбинированных методах решения задач с параметром

Пример. Найдите все значения параметра a такие, что каждый корень уравнения $3^{|x|+1} - a^3 + 240 \cdot \sin \frac{\pi |x|}{4} = 5a^2 + 3a + 3$ является корнем данного уравнения только при одном значении параметра.

Решение. Преобразуем уравнение $3 \cdot (3^{|x|} - 1) + 240 \cdot \sin \frac{\pi |x|}{4} = a^3 + 5a^2 + 3a$.

Введем функции $f(x) = 3 \cdot (3^{|x|} - 1) + 240 \cdot \sin \frac{\pi |x|}{4}$ и $g(a) = a^3 + 5a^2 + 3a$.

Тогда исходное уравнение имеет вид $f(x) = g(a)$.

Этап I. Выясняем свойства функции $f(x)$: $D(f) = \mathbb{R}$, непрерывна, четная и неотрицательная при всех $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 0$, $f(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow \infty$ и $E(f) = [0; +\infty)$.

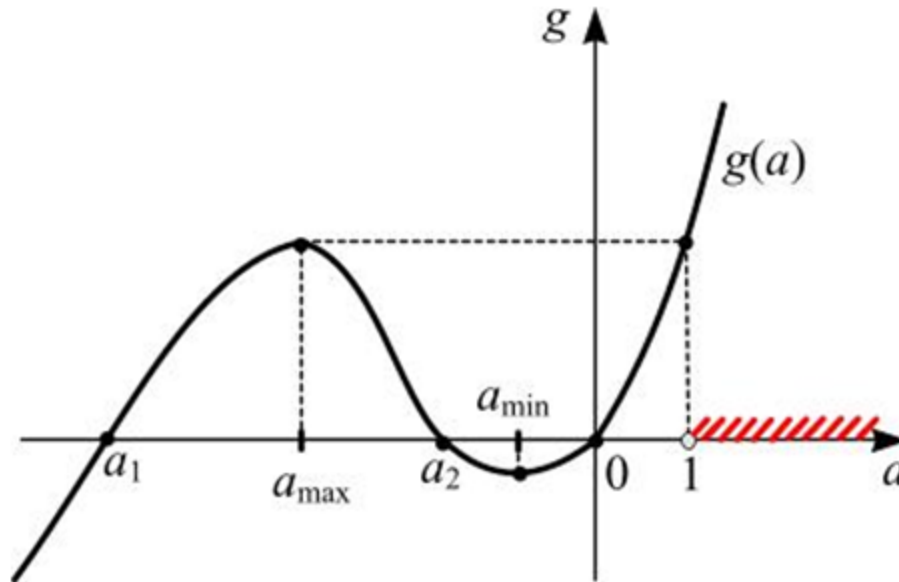
Тогда уравнение $f(x) = g(a)$ имеет решение при a таких, что $g(a) \geq 0$.

Этап II. Исследуем функцию $g(a) = a^3 + 5a^2 + 3a$ (находим участки монотонности и знакоположительности ($g(a) \geq 0$), точки экстремумов $a_{\max} = -3$,

$a_{\min} = -\frac{1}{3}$ и экстремумы $g_{\max}(-3) = 9$ и $g_{\min}\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{13}{27}$).

О комбинированных методах решения задач с параметром

Этап III. Строим график $g(a)$. Находим участки, где функция принимает каждое свое значение из множества своих значений при выполнении условия $g(a) \geq 0$ только при одном значении a .



Этап IV. Решаем неравенство $a^3 + 5a^2 + 3a > 9$. Получаем неравенство $(a+3)^2(a-1) > 0$, равносильное неравенству $a > 1$.

Так как $E(f) = [0; +\infty)$ и при $a > 1$ функция $g(a)$ принимает все значения из промежутка $(9; +\infty)$, то исходное уравнение имеет решения при всех таких a .

Требование о том, что функция $g(a)$ принимает каждое свое значение из множества своих значений при выполнении условия $g(a) \geq 0$ только при одном значении a , является достаточным для выполнения условия задачи.



Ответ: $a > 1$.

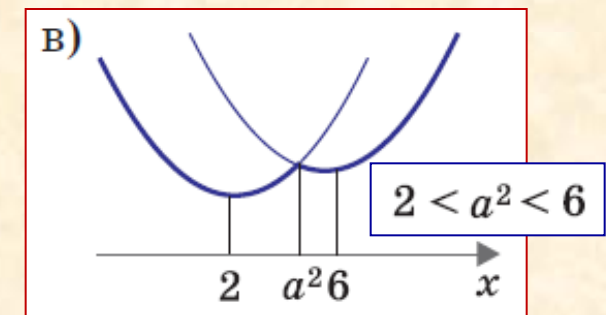
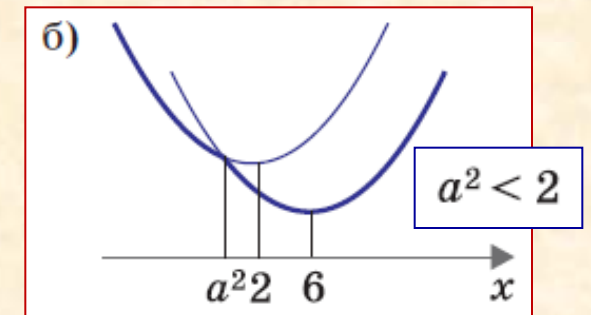
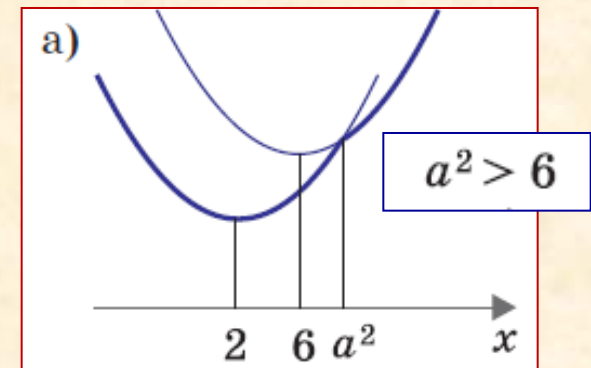
Комбинированные методы решения задач с параметром

Задача 11. Найти все значения a , при каждом из которых функция $f(x) = x^2 - 4|x - a^2| - 8x$ имеет более двух точек экстремума.

Решение. Если $x \geq a^2$, то $f(x) = x^2 - 12x + 4a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 6$. Если же $x \leq a^2$, то $f(x) = x^2 - 4x - 4a^2$, и в этом случае график функции $f(x)$ представляет собой часть параболы с осью симметрии $x = 2$, ветви которой также направлены вверх. Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a^2; f(a^2))$. Все возможные положения графика функции $f(x)$ показаны на рисунках (рис. .).

Функция $y = f(x)$ имеет более двух точек экстремума, а именно — три, в единственном случае (рис. .б):

$$2 < a^2 < 6 \Leftrightarrow a \in (-\sqrt{6}; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \sqrt{6}).$$



Ответ: $a \in (-\sqrt{6}; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \sqrt{6})$.

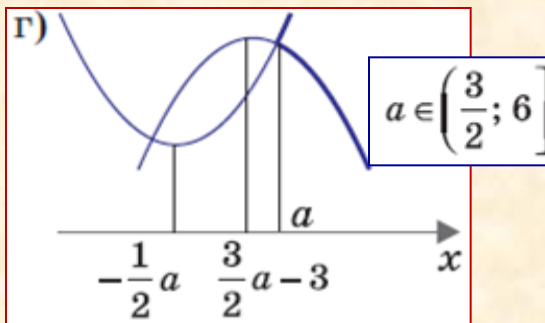
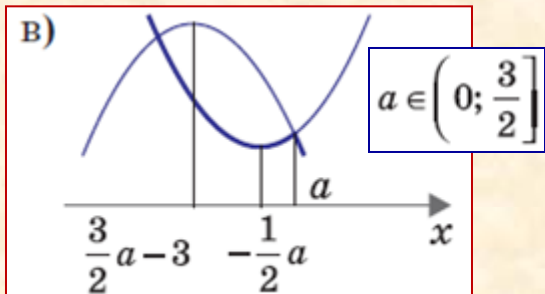
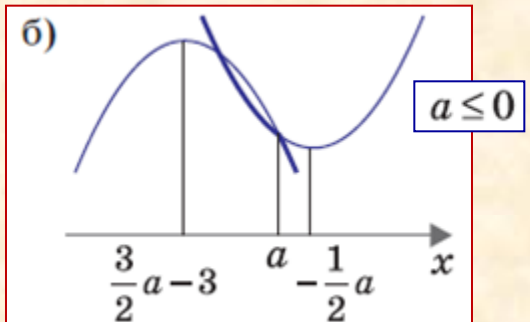
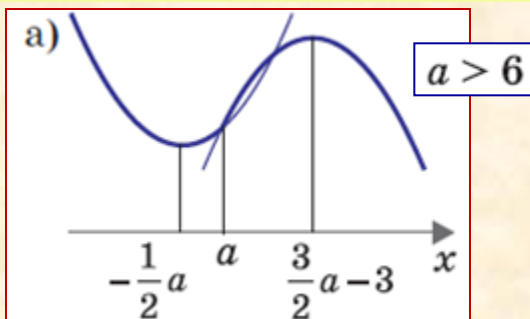
Комбинированные методы решения задач с параметром

Задача 12. Найти все значения a , при каждом из которых любая прямая, перпендикулярная оси ординат, имеет нечетное число общих точек с графиком функции $f(x) = (2a - 3)x - (x + 3)|x - a|$.

Решение. Если $x \geq a$, то $f(x) = -x^2 + (3a - 6)x + 3a$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вниз, и осью симметрии $x = \frac{3}{2}a - 3$. Если же $x \leq a$, то $f(x) = x^2 + ax - 3a$, и в этом случае график функции $f(x)$ представляет собой часть параболы с осью симметрии $x = -\frac{1}{2}a$, ветви которой уже направлены вверх.

Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a; f(a))$. Все возможные положения графика функции $f(x)$ показаны на рисунках (рис.).

Любая горизонтальная прямая пересекает график функции $y = f(x)$ в нечетном числе точек тогда и только тогда, когда функция монотонна на всей числовой прямой. Это происходит в только в одном случае (рис. б): $\frac{3}{2}a - 3 \leq a \leq -\frac{1}{2}a \Leftrightarrow a \leq 0$.



Ответ: $a \in (-\infty; 0]$.

Комбинированный метод в задачах с параметром

Задача 4. При каких значениях параметра a уравнение $|x^2 - 5|x|| = a(x + 4)$ имеет ровно три различных корня?

Решение. Построим на координатной плоскости Oxy графики функций $y = |x^2 - 5|x||$ и $y = a(x + 4)$.

Второй график представляет собой прямую с угловым коэффициентом a , проходящую через точку $(-4; 0)$.

Как видно из рисунка, существуют две прямые, проходящие через точку $(-4; 0)$ и пересекающие график функции $y = |x^2 - 5|x||$ ровно в трех точках. Одна из этих прямых есть ось Ox и соответствует значению $a = 0$. Другая прямая является касательной к графику функции $y = -x^2 + 5x$ в точке, принадлежащей интервалу $x \in (0; 5)$. Найдем значение a , соответствующее этой прямой. При таком a уравнение $-x^2 + 5x = a(x + 4) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + (a - 5)x + 4a = 0$ должно иметь одно решение на интервале $x \in (0; 5)$. $D = (a - 5)^2 - 16a = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow a = 1$ или $a = 25$.

Первый график

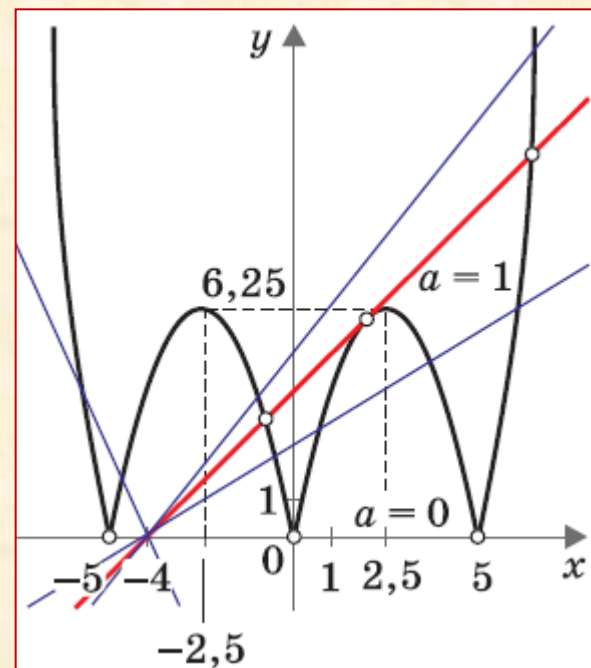
$$y = |x^2 - 5|x||$$

$$y = x^2 + 5x, \text{ если } x \leq -5;$$

$$y = -x^2 - 5x, \text{ если } -5 \leq x \leq 0;$$

$$y = -x^2 + 5x, \text{ если } 0 \leq x \leq 5;$$

$$y = x^2 - 5x, \text{ если } x \geq 5.$$



Ответ: $a = 0, a = 1$.

Сочетание алгебраического и геометрического методов



Пример. Пусть G — треугольник, образуемый при пересечении прямых l_1 , l_2 , l_3 , заданных соответственно уравнениями

$$y - 3x + 9 = 0, \quad x + y - 3 = 0, \quad y - x - 3 = 0,$$

а фигура Φ состоит из точек множества G таких, что неравенство

$$t^2 + 2t(x - 2) + 7 - y > 0$$

выполняется при всех значениях параметра t . Найти площадь фигуры Φ .

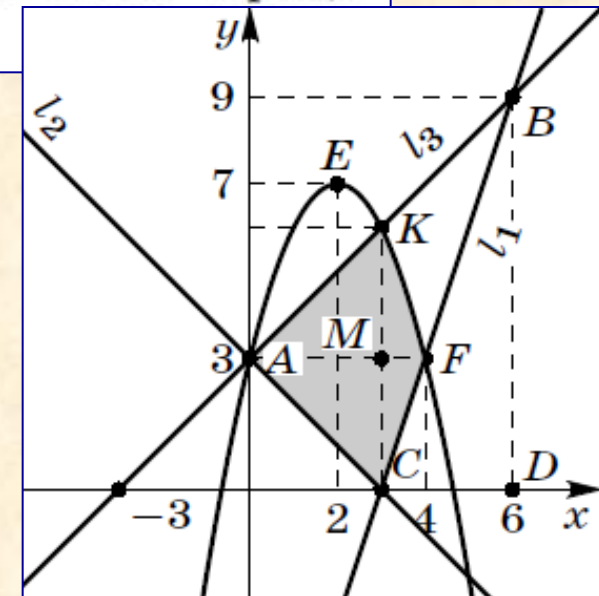
Решение. Неравенство $t^2 + 2t(x - 2) + 7 - y > 0$

является верным при всех $t \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда дискриминант квадратного трехчлена в его левой части отрицателен: $(x - 2)^2 - (7 - y) < 0$, т. е. $y < 7 - (x - 2)^2$.

Если σ — площадь фигуры Φ , то $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, где σ_1 — площадь треугольника ACF , σ_2 — площадь треугольника AKM , где $M(3; 3)$ — точка пересечения AF и KC , σ_3 — площадь криволинейного треугольника KMF .

Так как $\sigma_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$, $\sigma_2 = \frac{9}{2}$,

$$\sigma_3 = \int_3^4 (-x^2 + 4x) dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_3^4 = \frac{5}{3}, \text{ то } \sigma = \frac{73}{6}.$$



Ответ: $\frac{73}{6}$.

Пример комбинации методов

Пример. (химический факультет (весна), 2000, №6). При каждом значении параметра a решите неравенство $\sqrt{x+2a} > x + \sqrt{2a}$.

Решение. Введём обозначения $y = \sqrt{x+2a}$, $b = \sqrt{2a}$.

Сразу заметим, что для y, b выполнены неравенства $y, b \geq 0$. Так как $x = y^2 - b^2$, исходное уравнение принимает вид $(y^2 - b^2) - (y - b) < 0$, или

$$\begin{cases} (y-b)(y-(1-b)) < 0, \\ y \geq 0, b \geq 0. \end{cases} \quad (*)$$

Решим систему $(*)$ двумя способами.

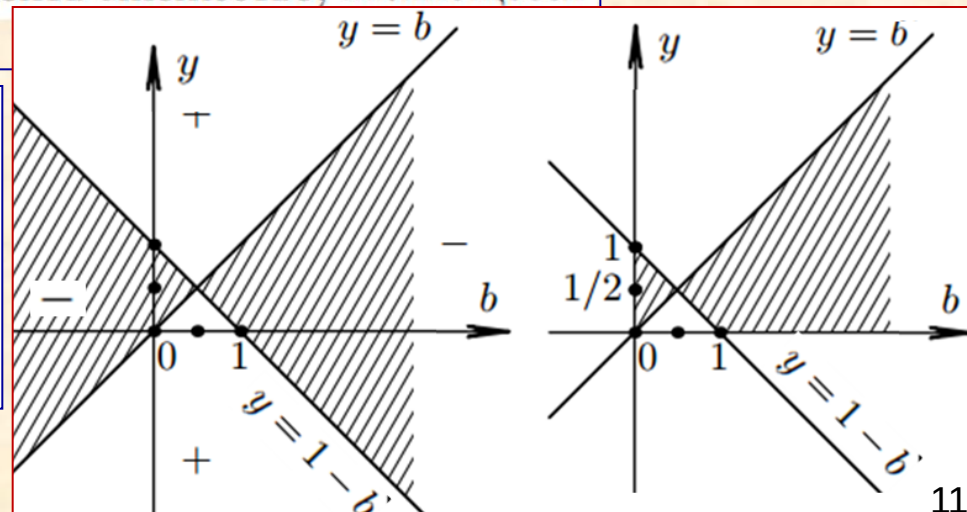
I. Графический способ. Так как уравнения $y = b$, $y = 1 - b$ задают прямые линии в плоскости $(b; y)$, удобно показать на графике области знакопостоянства функции $(y-b)(y-(1-b)) = 0$ и, учитывая неотрицательность переменных y, b , изобразить множество, являющееся решением системы.

Остаётся выписать ответ в терминах $(y; b)$:

если $b \in [0; 1/2]$, то $y \in (b; 1 - b)$;

если $b \in (1/2; 1]$, то $y \in (1 - b; b)$;

если $b > 1$, то $y \in [0; b)$.



Пример комбинации методов

$$\begin{cases} (y - b)(y - (1 - b)) < 0, \\ y \geq 0, \quad b \geq 0. \end{cases} \quad (*)$$

→ **II. Решим систему (*) аналитически.** Для этого нам потребуется сравнить корни $y_1 = b$, $y_2 = 1 - b$ между собой и с нулём. С нулём сравниваем, так как нам требуются неотрицательные корни. Из уравнений $b = 1 - b$, $b = 0$, $1 - b = 0$ находим решения $b = 0$, $b = 1/2$, $b = 1$. Значит, по переменной b исследуем систему (*) на каждом из участков по отдельности: $b \in [0; 1/2]$, $b \in (1/2; 1]$, $b > 1$. И опять приходим к ответу в терминах $(y; b)$:

если $b \in [0; 1/2]$, то $y \in (b; 1 - b)$;
если $b \in (1/2; 1]$, то $y \in (1 - b; b)$;
если $b > 1$, то $y \in [0; b)$.

Вернемся к переменным (a, x) :

$$\begin{cases} b \in [0; 1/2], \quad y \in (b; 1 - b), \\ b \in (1/2; 1], \quad y \in (1 - b; b), \\ b > 1, \quad y \in [0; b) \end{cases} \iff \begin{cases} a \in [0; 1/8], \quad x \in (0; 1 - 2\sqrt{2a}), \\ a \in (1/8; 1/2], \quad x \in (1 - 2\sqrt{2a}; 0), \\ a > 1/2, \quad x \in [-2a; 0). \end{cases}$$

Ответ: При $a < 0$ решений нет; если $a \in [0; 1/8]$, то $x \in (0; 1 - 2\sqrt{2a})$;
если $a \in (1/8; 1/2]$, то $x \in (1 - 2\sqrt{2a}; 0)$; если $a > 1/2$, то $x \in [-2a; 0)$.

Пример с «пучком прямых» (ЕГЭ 2013)



Пример 1. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$$

имеет единственный корень.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{3 - 2x - x^2} = -ax + 4a + 2$$

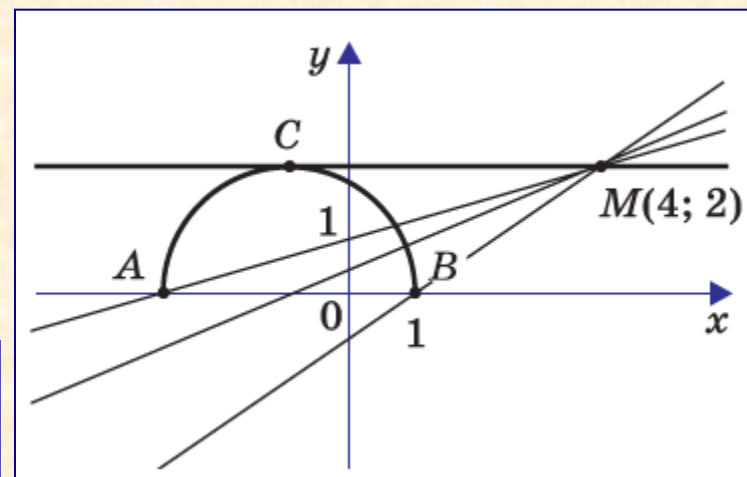
и рассмотрим графики функций

$$y = \sqrt{3 - 2x - x^2} \text{ и } y = -ax + 4a + 2.$$

Поскольку правая часть в формуле $y = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ неотрицательна, то и левая ее часть не может быть отрицательной. Поэтому

$$\begin{cases} y^2 = 3 - 2x - x^2, \\ y \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 4, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Графиком функции $y = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ является полуокружность. Заметим, что $y = -a(x - 4) + 2$ и если $x = 4$, то $y = 2$ вне зависимости от значений параметра. Поэтому прямая $y = -ax + 4a + 2$ при любом значении параметра проходит через точку $M(4; 2)$. Данное уравнение имеет единственный корень только в том случае, когда эта прямая имеет с полуокружностью единственную общую точку.



МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ 105 - 6 (754)
С. ШЕСТАКОВ №5 - 6 (754)

Ответ: $\{0\} \cup \left[-\frac{2}{3}; -\frac{2}{7}\right)$.



(ЕГЭ, 2013). Найдите все значения a , при каждом из которых имеет единственный корень уравнение $ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$.

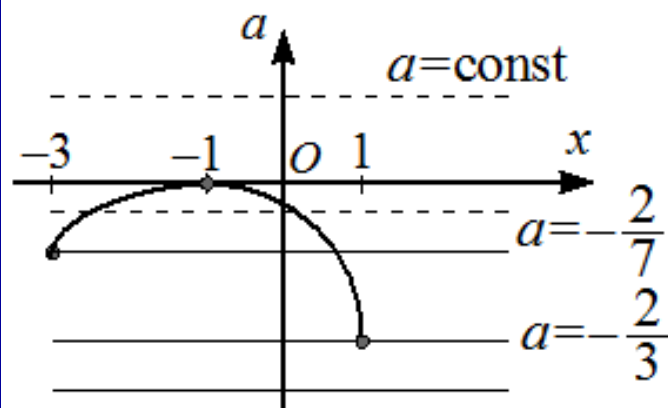
Решение. Так как $ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2 \Leftrightarrow \sqrt{3 - 2x - x^2} - 2 = a(4 - x)$ и при $x = 4$ подкоренное выражение отрицательно $3 - 2 \cdot 4 - 4^2 < 0$, то можно записать $a = \frac{\sqrt{3 - 2x - x^2} - 2}{4 - x}$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\sqrt{3 - 2x - x^2} - 2}{4 - x}$, $D(f) = [-3; 1]$. Функция непрерывна на $D(f)$. Найдём её производную $f'(x) = \frac{-1 - 5x - 2\sqrt{3 - 2x - x^2}}{2\sqrt{3 - 2x - x^2} \cdot (4 - x)^2}$.

Из уравнения $-1 - 5x - 2\sqrt{3 - 2x - x^2} = 0$ получаем $x = -1$.

$-3 < x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$
$f'(x) > 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) < 0$

$$f(-3) = -\frac{2}{7}, f(-1) = 0, f(1) = -\frac{2}{3}.$$



Рисуем эскиз графика в системе координат Oxa и проводим прямые $a = \text{const}$. Определяем значения параметра, при которых эти прямые пересекают график функции $f(x)$ в одной точке.

$$\text{Ответ: } a \in \left[-\frac{2}{3}; -\frac{2}{7}\right) \cup \{0\}.$$

Параметр как неизвестное (комбинирование)

17. При каждом значении параметра a решить уравнение

$$2x^3 - (a + 2)x^2 - ax + a^2 = 0.$$

Решение. Уравнение квадратное относительно a , решая его, получим:

$$\begin{cases} a = 2x \\ a = x^2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{a}{2} \\ x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2} \end{cases}.$$



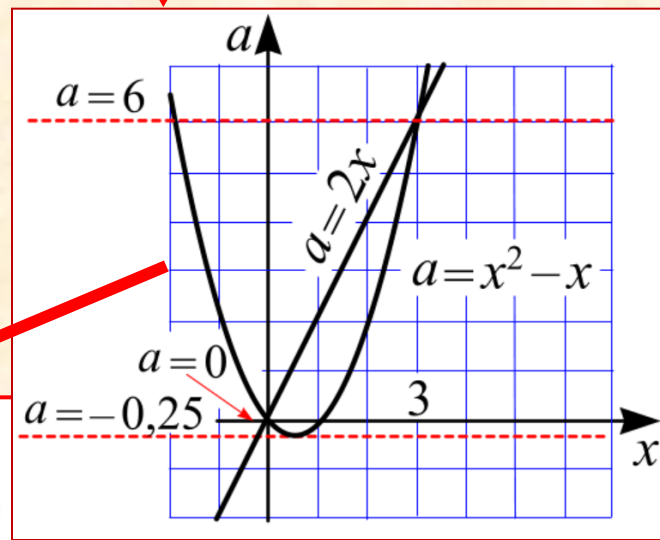
ответ статьи

~~Ответ: если $a < -\frac{1}{4}$, то один корень: $x = \frac{a}{2}$;
если $a = -\frac{1}{4}$, то два корня: $x = -\frac{1}{8}$, $x = \frac{1}{2}$; если
 $a > -\frac{1}{4}$, то три корня.~~

Ответ: если $a < -\frac{1}{4}$, то $x = \frac{a}{2}$; если $a = -\frac{1}{4}$, то
 $x = -\frac{1}{8}$, $x = \frac{1}{2}$; если $a = 0$, то $x = 0$, $x = 1$; если $a = 6$,
то $x = -\frac{5}{2}$, $x = 3$; если $-\frac{1}{4} < a < 0$, $0 < a < 6$ и $a > 6$, то $x = \frac{a}{2}$, $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$.

Требуется исследование

Графически
или
аналитически?



Комбинация методов

Пример. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$|y - x^2 + 4x - 5| + |y^2 - x^2 + 4x - 2ay + a^2 - 4| = 0$$

имеет ровно три различных решения.

Решение.

Введя новую переменную $z = x - 2$ и преобразовав уравнение к виду

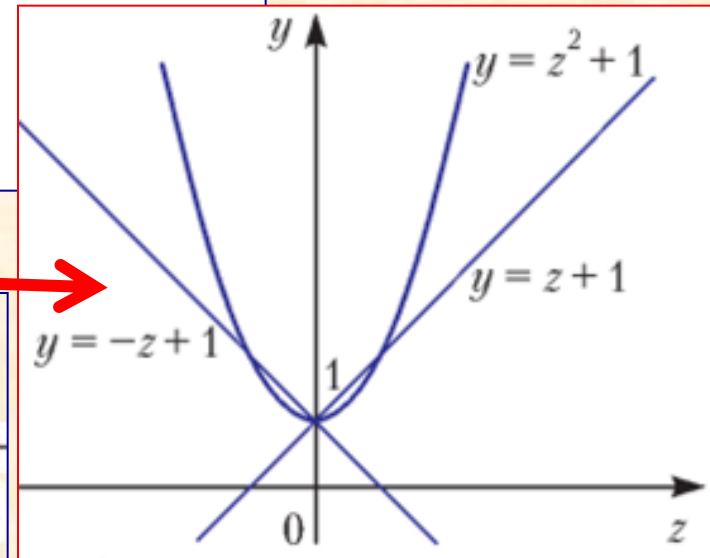
$$|y - 1 - z^2| + |(y - a)^2 - z^2| = 0,$$

запишем равносильную систему

$$\begin{cases} y = z^2 + 1, \\ y = \pm z + a. \end{cases}$$

Графически или аналитически?

Первое уравнение в системе координат zOy задает параболу с вершиной $(0; 1)$, а второе – «косой крест», состоящий из двух перпендикулярных прямых, пересекающихся в точке $(0; a)$ (рис). Очевидно, три общие точки параболы и



крест имеют, только если центр креста совпадает с вершиной параболы. Значит, $a = 1$.

Ответ: $a = 1$.

Комбинация методов

4. Найдите все значения $a > 0$, при каждом из которых из неравенства

$$x^2 + y^2 \leq a$$

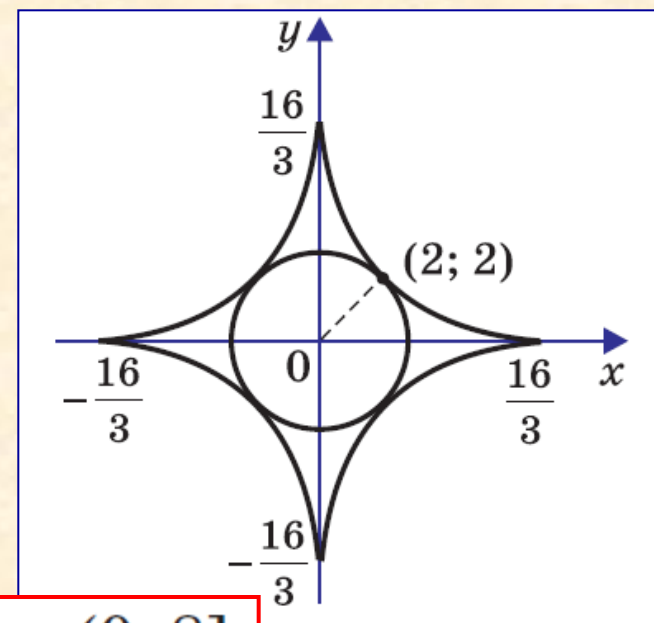
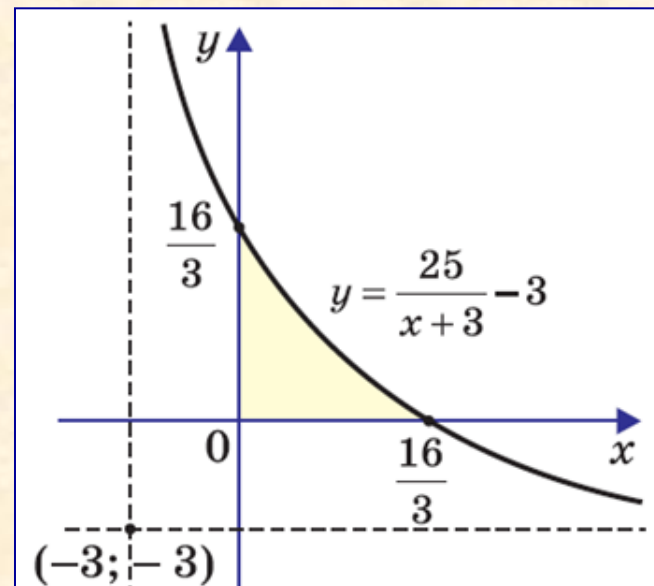
следует неравенство

$$(|x| + 3)(|y| + 3) \leq 25.$$

Решение. Согласно условию задачи, нужно найти такие значения параметра $a > 0$, при которых множество решений первого неравенства является подмножеством решений второго неравенства. Решением первого неравенства являются точки круга с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{a}$.

Множества решений каждого неравенства симметричны относительно координатных осей и прямой $y = x$. Действительно, если $(x; y)$ — решение, то $(-x; y)$, $(x; -y)$, $(-x; -y)$, $(y; x)$ тоже решения. Поэтому достаточно рассмотреть случай $x \geq 0, y \geq 0$. Тогда $|x| = x, |y| = y$ и второе неравенство примет вид:

$$y \leq \frac{25}{x+3} - 3.$$



Ответ: $a \in (0; 8]$.

О комбинированных методах и полезности решений одной задачи разными методами

Комбинированные методы основаны, как правило, на использовании особых свойств той или иной функции или уравнения, неравенства (а также их систем) и присущи решению только данной конкретной задачи.

Поэтому полезнее будет рассмотреть решение одной задачи, если ее формулировка это позволяет, разными методами (в том числе и разными графическими методами).

Решение одной задачи с параметром разными методами



МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2012

Функция и параметр

(типовые задания C5)



Прокофьев А.А.



Корянов А.Г.

Прокофьев А.А. – доктор педагогических наук, заведующий кафедрой высшей математики №1 НИУ МИЭТ, учитель математики ГОУ лицей №1557 г. Зеленограда; e-mail: aprokof@yandex.ru

Корянов А.Г. – методист по математике городского информационно-методического Центра (МБОУ БГИМЦ) г. Брянска, учитель математики МОУ лицей №27 г. Брянска; e-mail: akoryanov@mail.ru

СОДЕРЖАНИЕ

стр.

Введение.....	2
Глава 1. Функции, заданные в явном виде	3
1.1. Область определения функции..	3
1.2. Непрерывность функции.....	5
1.3. Дифференцируемость функции..	5
1.4. Нули функции.....	5
1.5. Промежутки знакопостоянства функции.....	8
1.6. Четность, нечетность функции..	9
1.7. Периодичность функции.....	10
1.8. Монотонность функции.....	10
1.9. Экстремум функции.....	12
1.10. Наибольшее (наименьшее) значение функции.....	15
1.11. Множество значений функции	20
1.12. График функции.....	23
Упражнения.....	24

Глава 2. Применение свойств функции.....	28
2.1. Выражения.....	28
2.2. Уравнения.....	30
2.3. Системы уравнений.....	35
2.4. Неравенства.....	38
2.5. Системы неравенств.....	41
Упражнения.....	44
Глава 3. Функции, заданные в неявном виде.....	47
3.1. Формула расстояния между точками.....	47
3.2. Уравнение прямой.....	48
3.3. Уравнение окружности.....	52
3.4. Уравнение параллелограмма.....	63
Упражнения.....	66
Глава 4. Решение задач разными способами	69

Глава 4. Решение задач разными способами

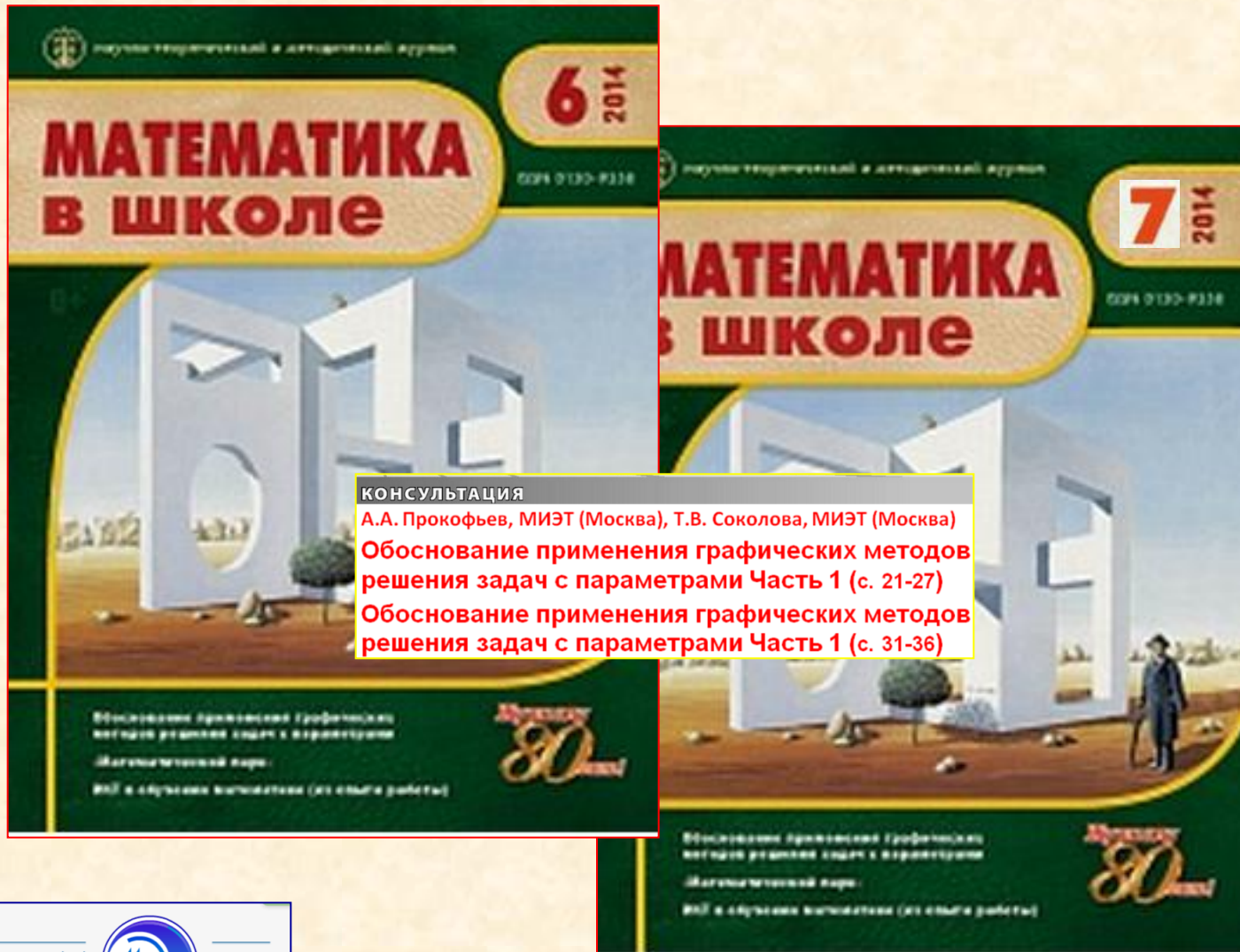
69

Ответы и указания.....

76

Адрес: <http://alexlarin.net/ege/2012/C5-2012.html>

Разные способы решения одной задачи с параметром



1. Решение одной задачи разными методами

Пример. Найти все значения параметра a , при каждом из которых модуль разности корней уравнения

$$x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$$

принимает наибольшее возможное значение.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0, \\ x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \\ |x_2 - x_1| &= \frac{\sqrt{D}}{|a|}. \end{aligned}$$

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения. Традиционное решение задачи состоит в вычислении наибольшего значения функции $f(a) = |x_1 - x_2|$, то есть функции
$$f(a) = 2\sqrt{-3 + 4a - a^2} = 2\sqrt{1 - (a - 2)^2},$$
 равного, очевидно, 2 при $a = 2$.

Замечание: значительная часть учащихся, скорее всего, попытается провести исследование функции на наибольшее значение по традиционному алгоритму, требующему применения производной, и столкнется на этом пути с неизбежными и довольно значительными трудностями, связанными с дифференцированием сложной функции и преобразованием иррациональных выражений.



МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №7-8(755)
С. ШЕСТАКОВ **июль-август**
isser@yandex.ru **2014**

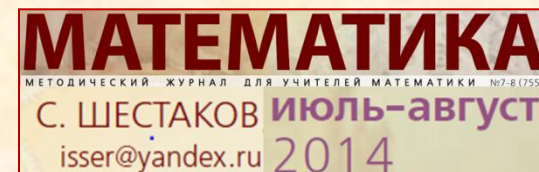
Ответ: 2.

2. Решение одной задачи разными методами

Пример 3. Найти все значения параметра a , при каждом из которых модуль разности корней уравнения

$$x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$$

принимает наибольшее возможное значение.



Решение. Второй способ заключается в переводе условия данной задачи с алгебраического языка на геометрический. Для этого выделим полные квадраты в левой части уравнения и перепишем его в виде

$$(x - 3)^2 + (a - 2)^2 = 1.$$

Полученное уравнение является уравнением окружности в системе координат Oxa , а корни данного уравнения равны абсциссам точек пересечения окружности и прямой, параллельной оси абсцисс. Расстояние между этими точками максимально, если они являются концами диаметра окружности, равного 2.

Ответ: 2.

1. Четыре способа решения одной задачи



Пример (ЕГЭ, 2010). Найти все значения a , при каждом из которых уравнение $36^x - (8a + 5) \cdot 6^x + 16a^2 + 20a - 14 = 0$ имеет единственное решение.

Решение (1-й способ). Пусть $6^x = t$, где $t > 0$. Тогда задачу можно переформулировать:

при каких значениях параметра a имеет один положительный корень квадратное уравнение $t^2 - (8a + 5)t + 16a^2 + 20a - 14 = 0$?

Значит, другой корень должен быть неположительным. Используя теорему Виета, имеем два случая (t_1 и t_2 – корни квадратного уравнения):

$$1) t_1 t_2 < 0 \Leftrightarrow 16a^2 + 20a - 14 < 0 \Leftrightarrow -1,75 < a \leq 0,5.$$

$$2) \begin{cases} t_1 t_2 = 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a^2 + 20a - 14 = 0, \\ 8a + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 0,5.$$

Ответ: $-1,75 < a \leq 0,5$.



Замечание. $c = t_1 t_2 \leq 0 \Rightarrow D \geq 0$, где D – дискриминант уравнения.

2. Четыре способа решения одной задачи



Пример (ЕГЭ, 2010). Найти все значения a , при каждом из которых уравнение $36^x - (8a + 5) \cdot 6^x + 16a^2 + 20a - 14 = 0$ имеет единственное решение.

Решение (2-й способ). Пусть $6^x = t$, где $t > 0$. Тогда исходное уравнение примет вид $t^2 - (8a + 5) \cdot t + 16a^2 + 20a - 14 = 0$.

Так как дискриминант D полученного уравнения положительный $D = (8a + 5)^2 - 4(16a^2 + 20a - 14) = 81$, то уравнение имеет два различных корня $t = 4a - 2$ или $t = 4a + 7$, причем при всех значениях a верно неравенство $4a - 2 < 4a + 7$.

Исходное уравнение будет иметь единственное решение, если одно из чисел $4a - 2$ и $4a + 7$ будет положительным, а другое неположительным. Отсюда следует

$$\begin{cases} 4a + 7 > 0, \\ 4a - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1,75 < a \leq 0,5.$$

Ответ: $-1,75 < a \leq 0,5$.

3. Четыре способа решения одной задачи



Пример (ЕГЭ, 2010). Найти все значения a , при каждом из которых уравнение $36^x - (8a + 5) \cdot 6^x + 16a^2 + 20a - 14 = 0$ имеет единственное решение.

Решение (3-й способ). Пусть $6^x = t$, где $t > 0$, тогда исходное уравнение примет вид $t^2 - (8a + 5) \cdot t + 16a^2 + 20a - 14 = 0$.

Вычислим дискриминант квадратного уравнения

$$D = (8a + 5)^2 - 4(16a^2 + 20a - 14) = 81$$

и найдем его корни $t = 4a - 2$ или $t = 4a + 7$.

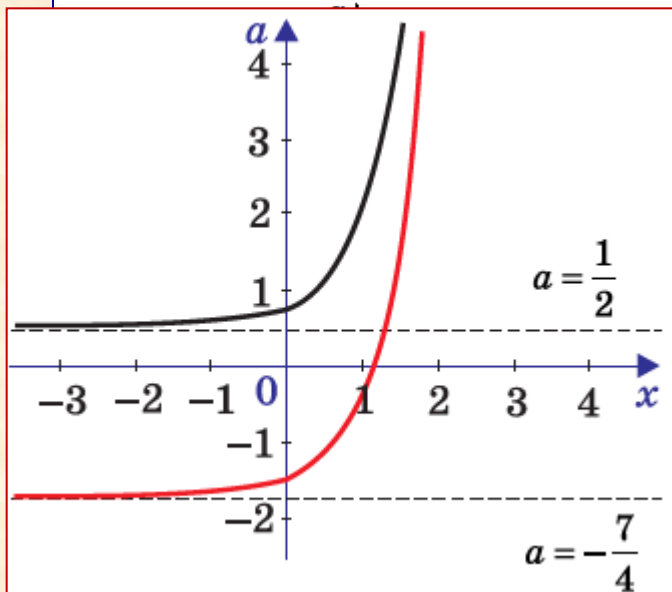
Возвратимся к переменной x :

$6^x = 4a - 2$ или $6^x = 4a + 7$. Отсюда

получаем $a = \frac{6^x + 2}{4}$ и $a = \frac{6^x - 7}{4}$

или $a = \frac{6^x}{4} + \frac{1}{2}$ и $a = \frac{6^x}{4} - \frac{7}{4}$. По-

строим схематично графики полученных функций. Рассмотрим прямые, параллельные оси Ox и пересекающие построенные графики. Единственная точка пересечения получается при $-1,75 < a \leq 0,5$



Ответ:

$$-1,75 < a \leq 0,5.$$

4. Четыре способа решения одной задачи



Пример (ЕГЭ, 2010). Найти все значения a , при каждом из которых уравнение $36^x - (8a + 5) \cdot 6^x + 16a^2 + 20a - 14 = 0$ имеет единственное решение.

Решение (4-й способ). Пусть $6^x = t$, где $t > 0$. Тогда исходное уравнение примет вид $t^2 - (8a + 5) \cdot t + 16a^2 + 20a - 14 = 0$.

Переформулируем задачу:

при каких значениях параметра a имеет один положительный корень квадратное уравнение $t^2 - (8a + 5) \cdot t + 16a^2 + 20a - 14 = 0$?

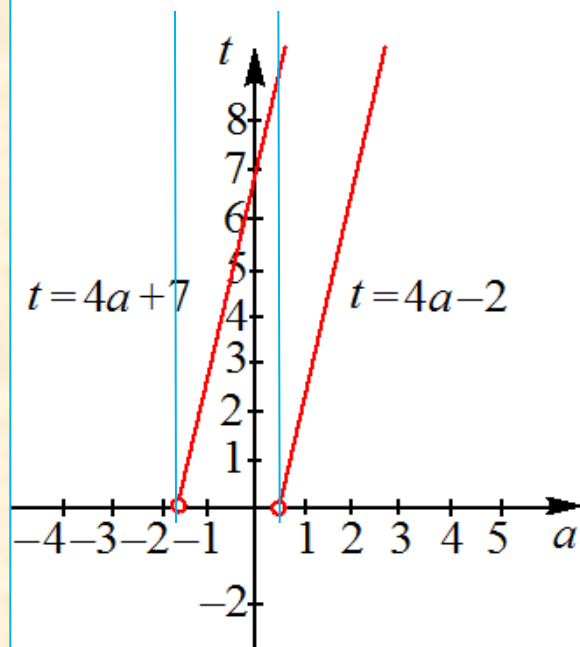
Вычислим его дискриминант квадратного уравнения

$$D = (8a + 5)^2 - 4(16a^2 + 20a - 14) = 81$$

и найдем корни $t = 4a - 2$ или $t = 4a + 7$.

Построим графики функций $t = 4a - 2$ или $t = 4a + 7$ при $t > 0$, которые пересекают ось Oa при $a = 0,5$ и $a = -1,75$ соответственно.

Прямые $a = \text{const}$ график ровно в одной точке при $-1,75 < a \leq 0,5$.



Ответ:

$$-1,75 < a \leq 0,5.$$

1. Четыре способа решения еще одной задачи

Найти значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{x+1} = x+a$ имеет только одно решение.

Способ I (используем теорему равносильности):

$$\sqrt{x+1} = x+a \Leftrightarrow \begin{cases} x+a \geq 0, \\ x+1 = (x+a)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+a \geq 0, \\ x^2 + (2a-1)x + (a^2-1) = 0. \end{cases}$$

Для того, чтобы исходное уравнение имело ровно один корень, надо потребовать, чтобы получившееся квадратное уравнение имело:

1) один корень, для которого выполнено условие $x+a \geq 0$;

2) два корня, x_- и x_+ , но такие, что $x_- + a < 0$,

$x_+ + a \geq 0$, то есть $x_- < -a \leq x_+$.

1. Квадратное уравнение имеет ровно один корень, если $D = 0$,
если $D = 0$, то есть $D = (2a-1)^2 - 4(a^2-1) = 0 \Leftrightarrow a = 1,25$.

2. Рассмотрим случай, когда квадратное уравнение имеет два корня, то есть $D > 0$: $5 - 4a > 0 \Leftrightarrow a < 1,25$;

$$x_+ = \frac{-(2a-1) + \sqrt{5-4a}}{2}, \quad x_- = \frac{-(2a-1) - \sqrt{5-4a}}{2}; \quad x_- < -a \leq x_+,$$

$$1 - 2a - \sqrt{5-4a} < -2a \leq 1 - 2a + \sqrt{5-4a}, \quad 1 + \sqrt{5-4a} \geq 0 \text{ при всех } a < 1,25.$$

$$1 - \sqrt{5-4a} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5-4a \geq 0, \\ 5-4a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 5-4a > 1 \Leftrightarrow a < 1.$$

Ответ: $a < 1$ и $a = 1,25$.



2. Четыре способа решения еще одной задачи

Найти значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{x+1} = x+a$ имеет только одно решение.



Способ II (используем замену переменной):

$$\sqrt{x+1} = x+a.$$

Пусть $\sqrt{x+1} = t$, $t \geq 0$, $x = t^2 - 1$.

$$t^2 - t - 1 + a = 0. \quad (*)$$

Исходное уравнение имеет один корень при тех и только тех значениях a , при которых уравнение $(*)$ имеет один неотрицательный корень.

1. $D = 0$, $D = 1 - 4(-1 + a) = 5 - 4a$, $5 - 4a = 0$, $a = 1,25$; $t = 0,5 > 0$. Значит, исходное уравнение при $a = 1,25$ имеет один корень.

2. Если $D > 0$, то есть $a < 1,25$, то уравнение $(*)$ имеет два корня. При этом если $a - 1 < 0$, то эти корни разных знаков, то есть только один из них положительный.

$$\begin{cases} a < 1,25, \\ a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow a < 1.$$



Ответ: $a < 1$ и $a = 1,25$.

3. Четыре способа решения еще одной задачи

Найти значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{x+1} = x + a$ имеет только одно решение.



Способ III (графический способ). Преобразуем уравнение к виду $\sqrt{x+1} - x = a$. Построим график функции, стоящей в левой части уравнения, $y = \sqrt{x+1} - x$.

1. $D(y) = [-1; +\infty)$.

2. Пересечение с осями: а) с Ox : $y = 0$, $\sqrt{x+1} - x = 0$,

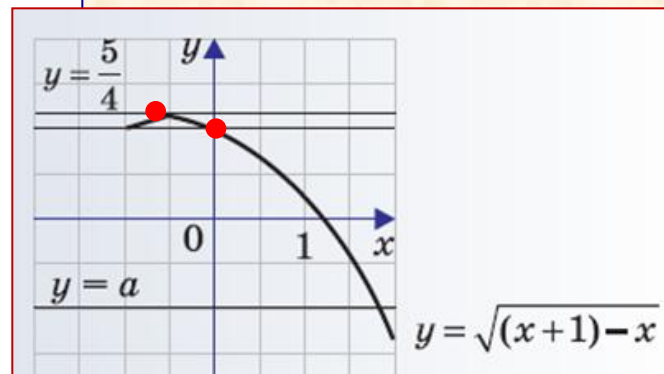
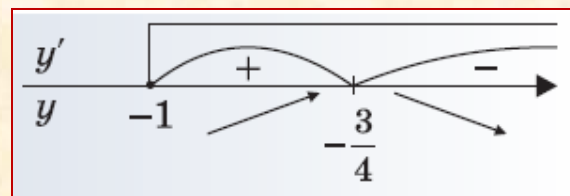
$$\sqrt{x+1} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

б) с Oy : $x = 0$, $y = 1$.

3. Найдем производную, критические точки и экстремумы функции:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - 1, \quad y' = 0, \quad \sqrt{x+1} = 0,5, \quad x = -\frac{3}{4},$$

$$y_{\max} = y(-0,75) = 1,25.$$



Ответ: $a < 1$ и $a = 1,25$.

4. Четыре способа решения еще одной задачи

Найти значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{x+1} = x+a$ имеет только одно решение.

Способ IV (графический способ). Построим график левой и правой частей уравнения: $y = \sqrt{x+1}$, $y = x+a$.

График функции $y = \sqrt{x+1}$ получается из графика функции $y = \sqrt{x}$ с помощью переноса его вдоль оси Ox влево на 1 единицу. График функции $y = x+a$ — прямая, параллельная прямой $y = x$ или совпадающая с ней при $a = 0$.

1. Из рисунка 6 видно, что при $a < 1$ графики функций пересекаются в одной точке, значит, исходное уравнение при $a < 1$ имеет одно решение.

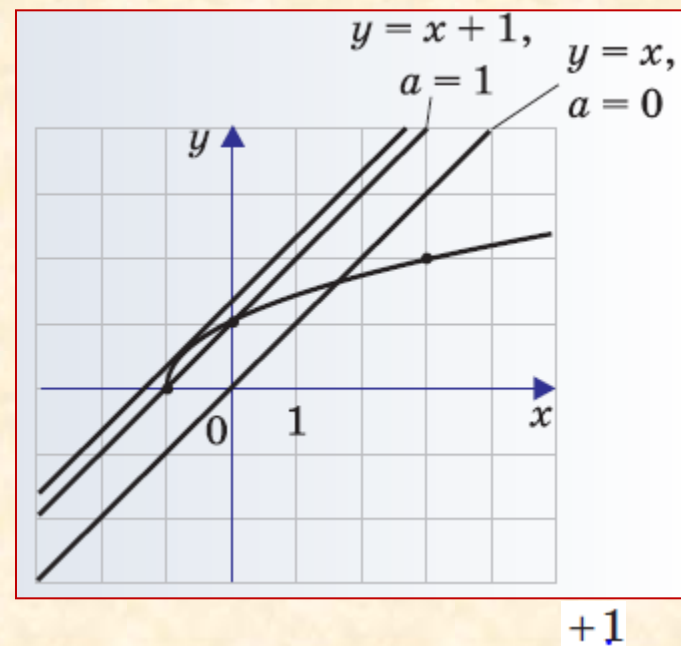
2. Условие касания:

$$\ast \begin{cases} \sqrt{x_0+1} - \frac{x_0}{2\sqrt{x_0+1}} = a, \\ \frac{1}{2\sqrt{x_0+1}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1,25, \\ x_0 = -0,75. \end{cases}$$



(*)

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f'(x) = g'(x). \end{cases}$$



Ответ: $a < 1$ и $a = 1,25$.

1. Два способа решения одной задачи

20. Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} y = \frac{(x-1)^2}{2} \\ \lg(5-a-y) = \lg(a-x) \end{cases} \text{ имеет решение.}$$

Т/Р №95 А. Ларина



Решение: Переходим к равносильной системе:

Переходим к равносильной системе:

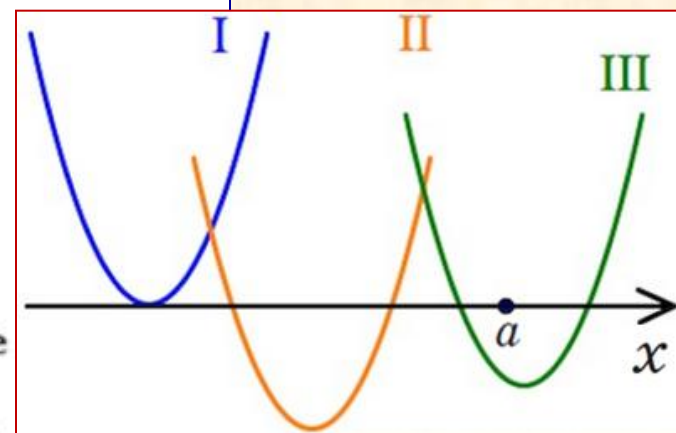
$$\begin{cases} y = \frac{(x-1)^2}{2}, \\ 5-a-y = a-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{(x-1)^2}{2}, \\ y = x - 2a + 5, \\ a-x > 0; \\ x < a; \end{cases}$$

Нас будут интересовать те значения a , при которых уравнение

$$\frac{(x-1)^2}{2} = x - 2a + 5 \text{ при условии } x < a \text{ имеет решение.}$$

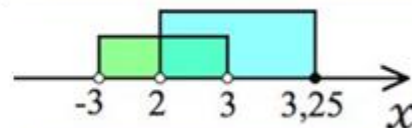
Рассмотрим $f(x) = (x-1)^2 - 2x + 4a - 10$. После преобразования $f(x)$ выглядит так: $f(x) = x^2 - 4x + 4a - 9$.

Нас устраивает ситуация, когда либо $f(a) < 0$ (III вариант), либо $x_{\text{верш}} < a$ при условии $D \geq 0$ (I, II варианты).



Ответ: $(-3; 3, 25]$.

$$\begin{cases} (a-1)^2 - 2a + 4a - 10 < 0, \\ \begin{cases} 2 < a, \\ 4 - (4a - 9) \geq 0; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)(a+3) < 0, \\ \begin{cases} a > 2, \\ a \leq 3, 25; \end{cases} \end{cases}$$



2. Два способа решения одной задачи

20. Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} y = \frac{(x-1)^2}{2} \\ \lg(5-a-y) = \lg(a-x) \end{cases} \quad \text{имеет решение.}$$

Т/Р №95 А. Ларина

Решение. Заменяем данную систему на равносильную

$$\begin{cases} y = \frac{(x-1)^2}{2} \\ 5-a-y = a-x \\ a-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{(x-1)^2}{2} \\ y = x+5-2a \\ x < a \end{cases}$$

Найдем все значения a , при которых система не имеет решений. Это будет, если:

1) не имеет решений уравнение $\frac{(x-1)^2}{2} = x+5-2a$ ⁽¹⁾ $x^2-4x+4a-9=0$;

$$D_1 = 13-4a < 0; a > 3,25.$$

2) уравнение (1) имеет решения, но эти решения не удовлетворяют третьему неравенству системы неравенству системы. При $a = 3,25$ уравнение (1) имеет один корень $x = 2 < 3,25$.

Пусть $a < 3,25$. Тогда уравнение (1) имеет два корня $x_1 = 2 - \sqrt{13-4a}$;
 $x_2 = 2 + \sqrt{13-4a}$. Система не будет иметь решений, если меньший корень $x_1 \geq a$

$$\text{Имеем } 2 - \sqrt{13-4a} \geq a \Leftrightarrow \begin{cases} 13-4a \leq 4-4a+a^2 \\ 2-a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \geq 9 \\ a \leq 2 \end{cases},$$

откуда $a \leq -3$.

Ответ: $(-3; 3,25]$.

1. Два способа решения одной задачи

Пример. Определить значения параметра a , при которых имеет единственное решение система неравенств

$$\begin{cases} y \leq ax - x^2 - 3, \\ x \leq ay - y^2 - 3. \end{cases}$$

$\triangle$ В системе координат Oxy графики функций $y = ax - x^2 - 3$ и $x = ay - y^2 - 3$ симметричны относительно прямой $y = x$, так как их уравнения получаются одно из другого заменой x на y (см. рис.). Для единственности решения необходимо и достаточно, чтобы парабола $y = ax - x^2 - 3$ касалась прямой $y = x$.

Введем функции $f(x) = ax - x^2 - 3$, $g(x) = x$. Получаем (в соответствии с условиями **(*)**) систему уравнений

$$\begin{cases} ax - x^2 - 3 = x, \\ a - 2x = 1. \end{cases} \quad \text{Отсюда } (2x+1)x - x^2 - 3 = x.$$

Из последнего уравнения получаем два значения x : $x_1 = \sqrt{3}$ и $x_2 = -\sqrt{3}$. Следовательно, условию задачи удовлетворяют следующие два значения параметра

$$a_1 = 1 - 2\sqrt{3} \text{ и } a_2 = 1 + 2\sqrt{3}.$$

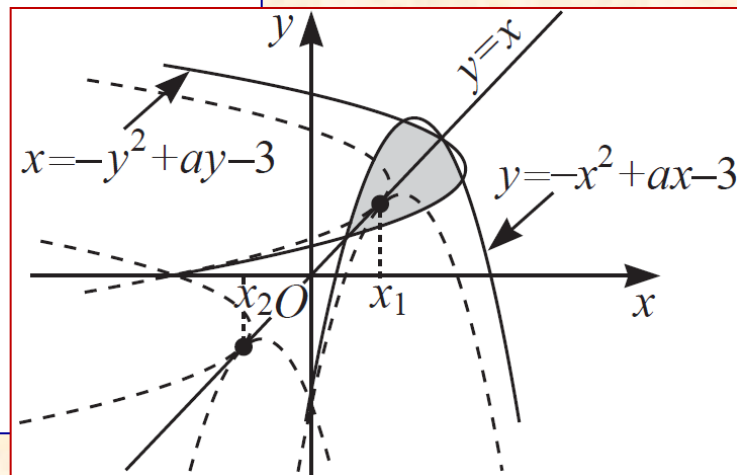
Ответ: $a_1 = 1 - 2\sqrt{3}$ и $a_2 = 1 + 2\sqrt{3}$.

**ЗАДАЧИ
С ПАРАМЕТРАМИ**
Прокофьев А.А.



(*)

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f'(x) = g'(x). \end{cases}$$



2. Два способа решения одной задачи

△ Если при некотором значении параметра a пара чисел (x_0, y_0) является решением данной системы неравенств, то пара (y_0, x_0) — также решение, поскольку при подстановке второй пары уравнения системы остаются теми же, но меняются местами. Следовательно, необходимым условием единственности решения является совпадение этих пар. Если $(x_0, y_0) = (y_0, x_0)$, то $x_0 = y_0$.

Подставляя $x_0 = y_0$ в систему, получим, что каждое неравенство примет вид $x_0 \leq ax_0 - x_0^2 - 3 \Leftrightarrow x_0^2 + (1 - a)x_0 + 3 \leq 0$ и будет иметь единственное решение в случае, если дискриминант D соответствующего квадратного трехчлена равен 0, т. е. $D = (1 - a)^2 - 12 = 0$. Решая уравнение $a^2 - 2a - 11 = 0$, получаем два значения параметра $a = 1 - 2\sqrt{3}$ и $a = 1 + 2\sqrt{3}$.

Подставляя значение $a = 1 - 2\sqrt{3}$ в систему неравенств, получаем

$$\begin{cases} y \leq (1 - 2\sqrt{3})x - x^2 - 3, \\ x \leq (1 - 2\sqrt{3})y - y^2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - (1 - 2\sqrt{3})x + y + 3 \leq 0, \\ y^2 - (1 - 2\sqrt{3})y + x + 3 \leq 0. \end{cases}$$

Сложив левые части и правые части неравенств системы, получим $x^2 + 2\sqrt{3}x + y^2 + 2\sqrt{3}y + 6 \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x + \sqrt{3})^2 + (y + \sqrt{3})^2 \leq 0. \text{ Отсюда следует } x = -\sqrt{3} \text{ и } y = -\sqrt{3}.$$

Аналогично действуя, получим, что при $a = 1 + 2\sqrt{3}$ система имеет единственное решение $x = \sqrt{3}$ и $y = \sqrt{3}$. ▲

ЗАДАЧИ
С ПАРАМЕТРАМИ
Прокофьев А.А.

Определение
необходимых
значений
параметра

Отбор
достаточных
значений
параметра

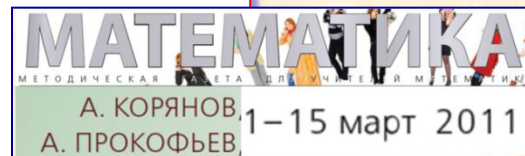
Ответ: $a_1 = 1 - 2\sqrt{3}$ и $a_2 = 1 + 2\sqrt{3}$.

1. Два способа решения одной задачи

Пример 8. (ЕГЭ-2010, тренировочная работа МИОО.)

Найдите все значения a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} \frac{x - ax - a}{x - 2 + 2a} \geq 0, \\ x - 8 > ax \end{cases} \quad \text{не имеет решений.}$$



Решение. Способ I. Рассмотрим второе неравенство системы: $(1 - a)x > 8$. Если $a = 1$, то неравенство, а значит, и система не имеют решений; если $a < 1$, то решением неравенства являются все $x > \frac{8}{1-a}$; если $a > 1$, то $x < \frac{8}{1-a}$.

При $a \neq 1$ первое неравенство системы равносильно системе

$$\begin{cases} (1-a)\left(x - \frac{a}{1-a}\right)(x - 2(1-a)) \geq 0, \\ x - 2(1-a) \neq 0. \end{cases} \quad (1).$$

Запишем решение системы (1):

при $a \leq 0,5$ все $x \leq \frac{a}{1-a}$ или $x > 2(1-a)$; при $0,5 < a < 1$ все $x < 2(1-a)$ или $x \geq \frac{a}{1-a}$;

при $1 < a < 2$ $\frac{a}{1-a} \leq x < 2(1-a)$; при $a \geq 2$ $2(1-a) < x \leq \frac{a}{1-a}$.

Замечаем, что при $a < 1$ система неравенств, данная в условии, имеет решения. данная в условии, имеет решения.

При $a > 1$ система не будет иметь решения, если множества решений первого и второго неравенства системы не пересекаются, то есть

$$\begin{cases} a > 1, \\ \frac{a}{1-a} \geq \frac{8}{1-a}, \\ 2(1-a) \geq \frac{8}{1-a} \end{cases} \Leftrightarrow 1 < a \leq 3.$$

Ответ: $1 \leq a \leq 3$.

2. Два способа решения одной задачи

Пример 8. (ЕГЭ-2010, тренировочная работа МИОО.) Найдите все значения a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} \frac{x - ax - a}{x - 2 + 2a} \geq 0, \\ x - 8 > ax \end{cases} \text{ не имеет решений.}$$

Решение. Воспользуемся методом областей

Рассмотрим второе неравенство системы: $(1 - a)x > 8$. Уравнение $(1 - a)x = 8$ задает на плоскости Oax гиперболу, которая разбивает ее на три области. Для определения знака значения выражения $f_1(x; a) = (1 - a)x - 8$ достаточно подставить координаты точки $O(0; 0)$ и затем воспользоваться правилом знакопереживания.

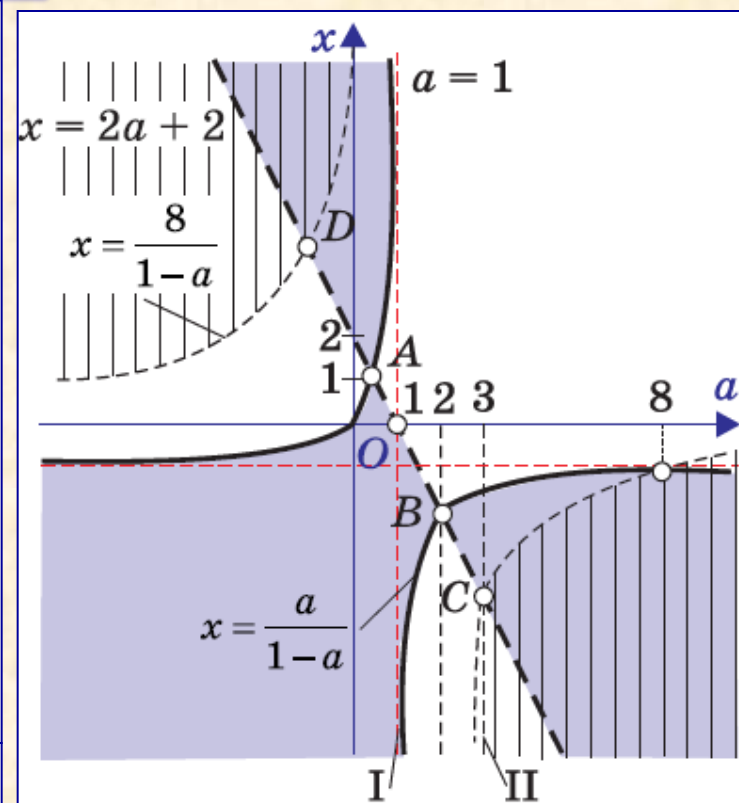
Для второго неравенства рассмотрим выраже-

ние $f_2(x; a) = \frac{x - ax - a}{x - 2 + 2a}$, которое определено при $x \neq 2(1 - a)$ и обращается в нуль при $x = \frac{a}{1 - a}$.

Проводя прямые, параллельные оси x , видим (рис.), что существует два критических положения этих прямых I ($a = 1$) и II ($a = 3$).



Способ II. Воспользуемся методом областей



Ответ: $1 \leq a \leq 3$.

1. Два способа решения одной задачи

Задача 7. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} y^2 - (2a+1)y + a^2 + a - 2 = 0, \\ \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + \sqrt{(x-a)^2 + (y-3)^2} = 3 \end{cases} \quad \text{имеет единственное решение?}$$

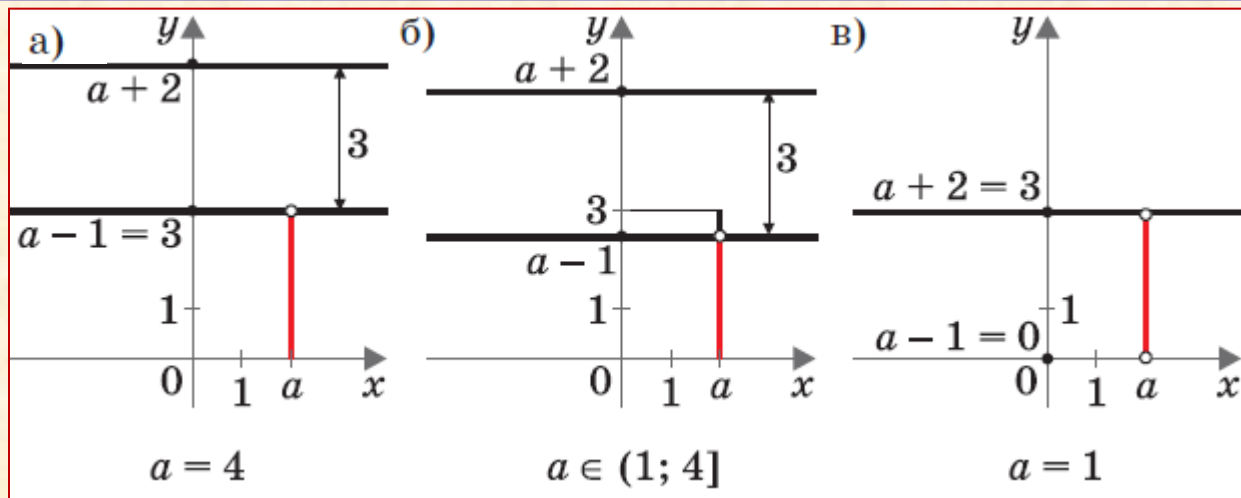
Решение. Решим первое уравнение системы как квадратное относительно y .

$$y = \frac{2a+1+3}{2} = a+2 \text{ и } y = \frac{2a+1-3}{2} = a-1.$$

Определим геометрический смысл второго уравнения. Множество решений уравнения на координатной плоскости представляет собой отрезок, соединяющий точки с координатами $(a; 0)$ и $(a; 3)$.

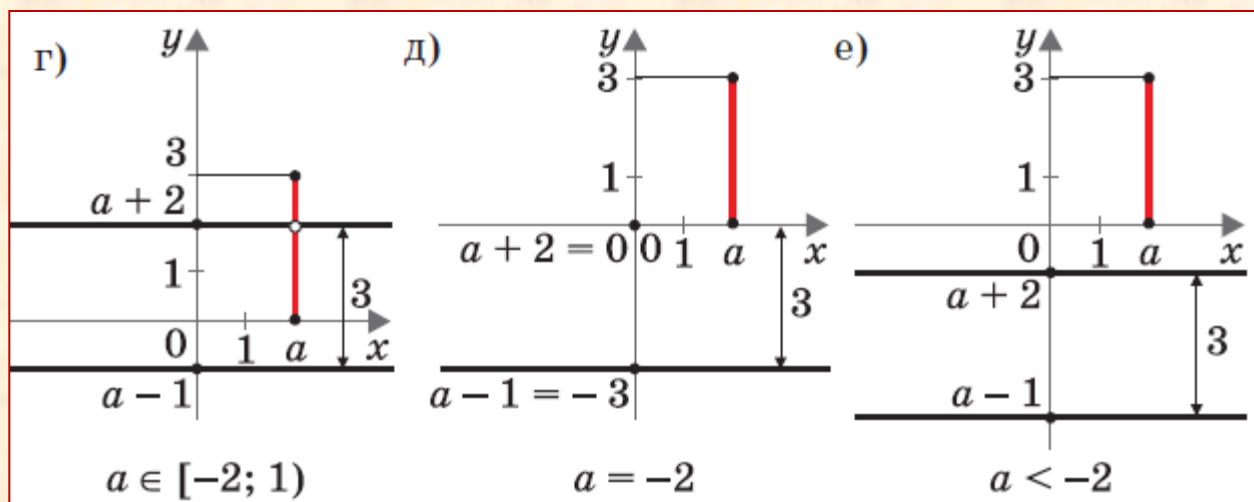
Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда:

1. Верхний конец отрезка лежит на прямой $y = a - 1$ или выше ее, при этом нижний конец отрезка лежит ниже этой прямой. Имеем: $a \in (1; 4]$ (рис. а и б).

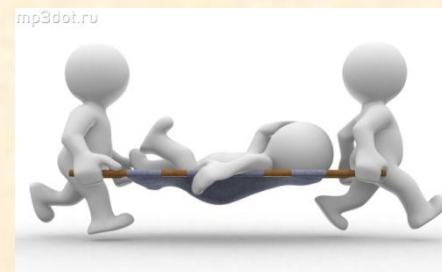


1. Два способа решения одной задачи

2. Нижний конец отрезка лежит на прямой $y = a + 2$ или ниже ее, при этом верхний конец отрезка лежит выше этой прямой. Эта конфигурация соответствует значениям $a \in [-2; 1)$ (рис. г и д).



Ответ: $a \in [-2; 1) \cup (1; 4]$.



2. Два способа решения одной задачи

Задача 7. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} y^2 - (2a+1)y + a^2 + a - 2 = 0, \\ \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + \sqrt{(x-a)^2 + (y-3)^2} = 3 \end{cases} \quad \text{имеет единственное решение?}$$

Решение. Второе уравнение системы для точек $M(x; y)$, $A(a; 0)$, $B(a; 3)$ в системе координат Oxy задаёт отрезок AB .

Запишем параметрические уравнения отрезка AB (на плоскости Oxy):

$$\begin{cases} x(t) = (1-t)a + ta, \\ y(t) = (1-t) \cdot 0 + t \cdot 3, \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = a, \\ y(t) = 3t, \\ 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Подставляя $x(t)$, $y(t)$ в первое уравнение данной в условии системы, получаем уравнение

$$9t^2 - 3(2a+1)t + a^2 + a - 2 = 0,$$

корнями которого являются числа

$$t_1 = \frac{a-1}{3} \quad \text{и} \quad t_2 = \frac{a+2}{3}.$$

Условие $0 \leq t_1 = \frac{a-1}{3} \leq 1$ выполняется при $1 \leq a \leq 4$, а условие $0 \leq t_2 = \frac{a+2}{3} \leq 1$ выполняется при $-2 \leq a \leq 1$.

Так как числа $\frac{a-1}{3}$ и $\frac{a+2}{3}$ различны при всех значения a , то получаем, что единственное решение будет только при $a \in [-2; 1) \cup (1; 4]$.

Ответ: $a \in [-2; 1) \cup (1; 4]$.

1. Три способа решения одной задачи

Пример 14. (ЕГЭ-2010.) Найдите все значения a , при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - 3|x - a^2| - 5x$$

имеет более двух точек экстремума.



Решение. Способ I
(предложенный в критериях).

1. Функция f имеет вид:

а) при $x \geq a^2$: $f(x) = x^2 - 8x + 3a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 4$;

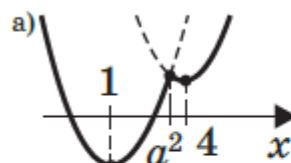
б) при $x \leq a^2$: $f(x) = x^2 - 2x - 3a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 1$.

2. Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a^2; f(a^2))$, где $f(a^2) = a^4 - 5a^2$.

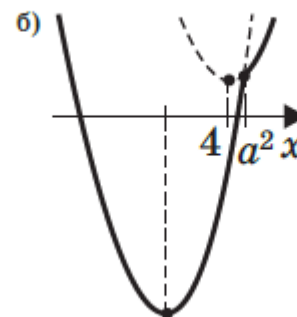
3. Функция $y = f(x)$ имеет три точки экстремума в единственном случае (рис. 12, а):

$$1 < a^2 < 4 \Leftrightarrow 1 < |a| < 2.$$

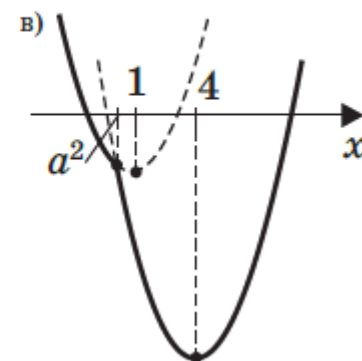
$$1 < a^2 < 4$$



$$a^2 \geq 4$$



$$a^2 \leq 1$$



Ответ: $-2 < a < -1, 1 < a < 2$.

2. Три способа решения одной задачи

Пример 14. (ЕГЭ-2010.) Найдите все значения a , при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - 3|x - a^2| - 5x$$

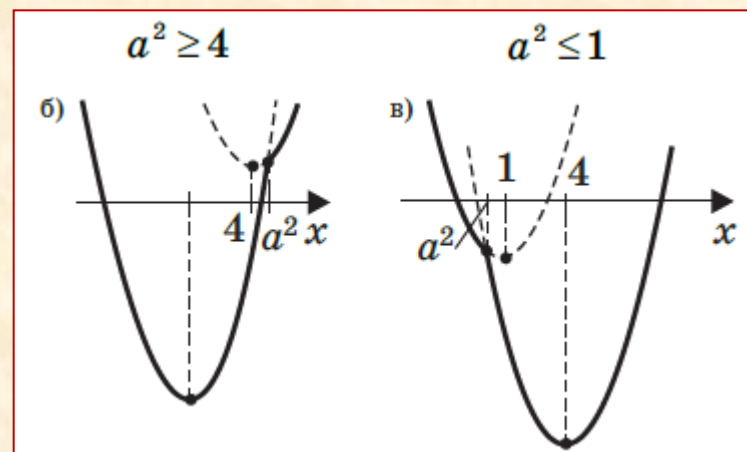
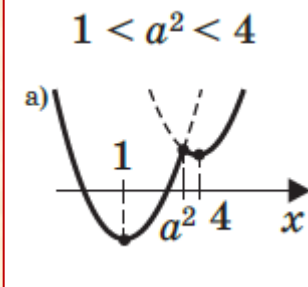
имеет более двух точек экстремума.

Способ II. Данная функция имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 3a^2, & \text{если } x \leq a^2, \\ x^2 - 2x - 3a^2, & \text{если } x \geq a^2. \end{cases}$$

Функция $g(x) = x^2 - 8x + 3a^2$ задает семейство парабол с вершиной в точке $(4; -16 + 3a^2)$, а функция $h(x) = x^2 - 2x - 3a^2$ задает семейство парабол с вершиной в точке $(1; -1 - 3a^2)$. Условие задачи выполняется (см. рис.), если имеет решение система неравенств:

$$\begin{aligned} \begin{cases} g(1) > h_{\text{в}}, \\ h(4) > g_{\text{в}} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -7 + 3a^2 > -1 - 3a^2, \\ 8 - 3a^2 > -16 + 3a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 > 1, \\ a^2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -2 < a < -1 \text{ или } 1 < a < 2. \end{aligned}$$



Ответ: $-2 < a < -1, 1 < a < 2$.

3. Три способа решения одной задачи

Способ III.1. Функция f определена и непрерывна на всей числовой прямой. Раскрывая модуль при каждом фиксированном значении параметра a , получаем $f(x) = x^2 - 8x + 3a^2$ при $x \geq a^2$ и $f(x) = x^2 - 2x - 3a^2$ при $x \leq a^2$. Производная функции равна $f'(x) = 2x - 8$ при $x > a^2$ и $f'(x) = 2x - 2$ при $x < a^2$. В точке $x = a^2$ функция не имеет производной, так как равенство $2x - 8 = 2x - 2$ не выполняется ни при каком значении x . Используя достаточное условие существования экстремума, найдем все такие значения a , при которых найдется более двух точек, в которых производная равна нулю или не существует и при переходе через которые ее производная меняет знак.

Производная функции не существует в точке $x = a^2$ и может равняться нулю в точках $x = 1$ и $x = 4$ при соответствующем расположении их относительно $x = a^2$. Рассмотрим случаи взаимного расположения этих точек на числовой прямой

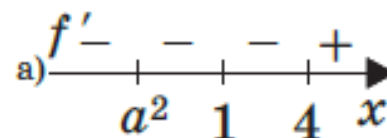
Функция $y = f(x)$ имеет три точки экстремума в единственном случае (рис. б):

$$1 < a^2 < 4 \Leftrightarrow 1 < |a| < 2.$$

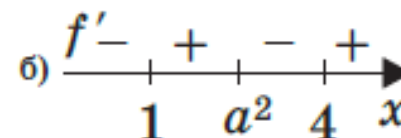


А. КОРЯНОВ, 1–15 март 2011
А. ПРОКОФЬЕВ,

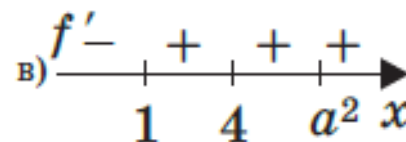
$$a^2 \leq 1$$



$$1 < a^2 < 4$$



$$a^2 \geq 4$$



Ответ: $-2 < a < -1, 1 < a < 2.$

Использование производной

Пример 17. (ЕГЭ-2010, вторая волна.) Найдите все значения a , при каждом из которых наибольшее значение функции

$$f(x) = x^2 - 11|x - a| - x$$

на отрезке $[-8; 7]$ не принимается ни на одном из концов этого отрезка.

Решение. 1. Функция f определена и непрерывна на всей числовой прямой и имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 12x + 11a, & \text{если } x \geq a, \\ x^2 + 10x - 11a, & \text{если } x \leq a. \end{cases}$$

2. Производная функции равна $f'(x) = 2x - 12$ при $x > a$ и $f'(x) = 2x + 10$ при $x < a$. Отметим, что в точке $x = a$ функция не имеет производной.

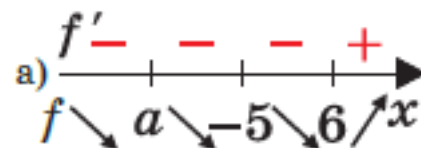
3. Условию задачи удовлетворяет только случай $-5 < a < 6$, соответствующий рисунку б, при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} f(-8) < f(a), \\ f(7) < f(a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-8)^2 + 10 \cdot (-8) - 11a < a^2 - a, \\ 7^2 - 12 \cdot 7 + 11a < a^2 - a \end{cases} \Leftrightarrow$$

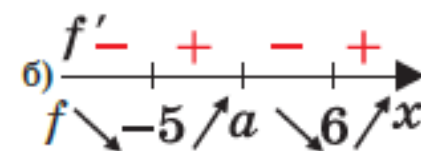
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 10a + 16 > 0, \\ a^2 - 12a + 35 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a + 8)(a + 2) > 0, \\ (a - 5)(a - 7) > 0. \end{cases}$$



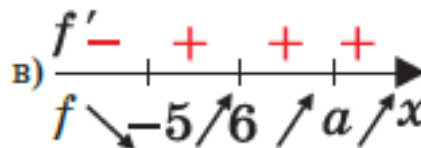
$$a \leq -5$$



$$-5 < a < 6$$



$$a \geq 6$$



Ответ: $-2 < a < 5$.

Графически быстро, аналитически долго

Пример (ЕГЭ, 2010). При каких значениях a уравнение $|x + a^2| = |a + x^2|$ имеет ровно три корня?

Решение (1-й способ). Преобразуем уравнение:

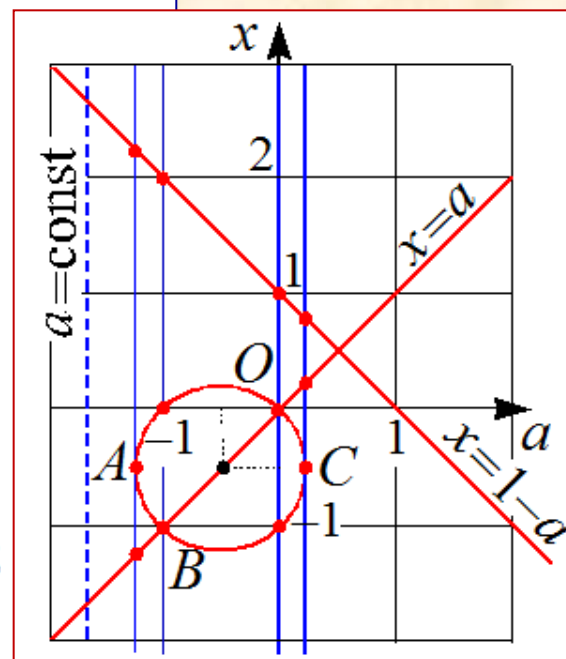
$$\begin{aligned} |x + a^2| &= |a + x^2| \Leftrightarrow (x + a^2)^2 = (a + x^2)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x + a^2 + a + x^2)(x + a^2 - a - x^2) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x + a^2 + a + x^2 = 0, \\ x + a^2 - a - x^2 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}, \\ (x - a)(x - a + 1) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Три решения будет при тех и только тех значениях параметра a , при которых прямая $a = \text{const}$ проходит:

1) точки A и C , то есть при $a = \frac{-1 - \sqrt{2}}{2}$ или $a = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$;

2) точки B и O . Из уравнения $2\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ получаем значения $a = -1$ или $a = 0$.

При всех остальных значениях параметра количество решений исходного уравнения будет больше или меньше трех.



Ответ:

$$\frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}, -1, 0.$$

Графически быстро, аналитически долго

Пример (ЕГЭ, 2010). При каких значениях a уравнение $|x + a^2| = |a + x^2|$ имеет ровно три корня?

Решение (2-й способ, аналитический). Выполняя равносильные переходы, преобразуем исходное уравнение:

$$|x + a^2| = |a + x^2| \Leftrightarrow (x + a^2)^2 = (a + x^2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + a^2 + a = 0, \\ x^2 - x - a^2 + a = 0. \end{cases}$$

Первое уравнение совокупности $x^2 + x + a^2 + a = 0$ при $D = 1 - 4a^2 - 4a \geq 0$, т.е. при $\frac{-1 - \sqrt{2}}{2} \leq a \leq \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$, имеет корни

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4a^2 - 4a}}{2} \text{ и } x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4a^2 - 4a}}{2}.$$

Второе уравнение совокупности $x^2 - x - a^2 + a = 0$ при всех a имеет корни $x_3 = a$ и $x_4 = 1 - a$.

Исходное уравнение будет иметь три корня в случае, если среди чисел x_1 , x_2 , x_3 и x_4 имеется три различных.

Рассмотрим возможные варианты:

1. Равенство $x_1 = x_2$ возможно
2. Равенство $x_3 = x_4$ во ...
3. Равенство $x_1 = x_3$ возможно ...
4. Равенство $x_2 = x_3$ во ...
5. Равенство $x_1 = x_4$ возможно
6. Равенство $x_1 = x_4$ во ...



Ответ: $\frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}, -1, 0$.

Графически быстро, аналитически долго

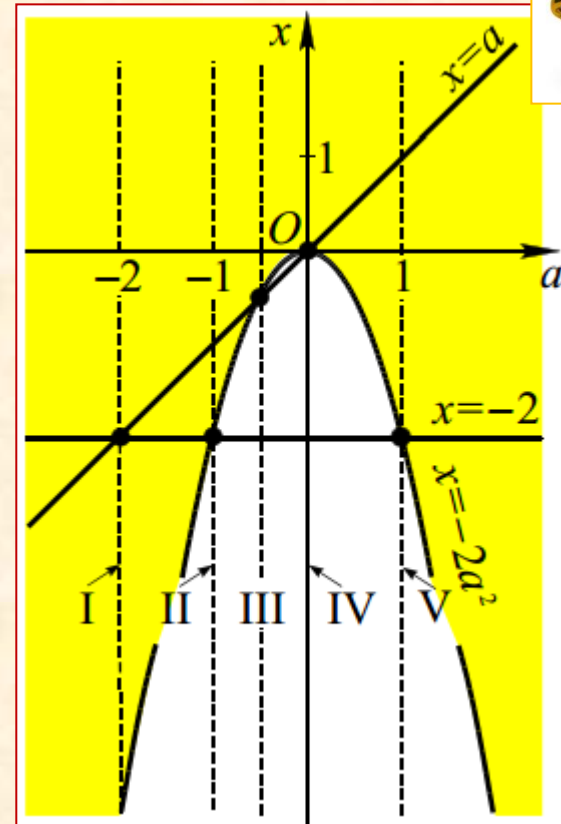
Пример (МИЭТ, 2002). При каких значениях параметра a имеет ровно два различных корня уравнение

$$\sqrt{x + 2a^2}(x^2 + (2 - a)x - 2a) = 0?$$

Решение. Корни данного уравнения должны удовлетворять условию $x \geq -2a^2$ (условие существования квадратного корня из выражения $x + 2a^2$). Заметим, что $x^2 + (2 - a)x - 2a = (x - a)(x + 2)$. Тогда

$$\sqrt{x + 2a^2}(x^2 + (2 - a)x - 2a) = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2a^2, \\ \begin{cases} x = -2a^2, \\ x = a, \\ x = -2. \end{cases} \end{cases}$$

I) $a = -2$, II) $a = -1$, III) $a = -0,5$,
IV) $a = 0$, V) $a = 1$.



Ответ: $\{-2\} \cup [-1; -0,5) \cup (0; 1]$.

Графически быстро, аналитически сложно

Пример (ЕГЭ, 19 июня 2013). Найти все значения a , при каждом из которых уравнение $|\sin^2 x + 2 \cos x + a| = \sin^2 x + \cos x - a$ имеет на промежутке $(\pi/2; \pi]$ единственный корень.

Решение (1-й способ). Рассмотрим два случая.

Первый случай $\sin^2 x + 2 \cos x + a \geq 0$. Исходное уравнение примет вид: $\sin^2 x + 2 \cos x + a = \sin^2 x + \cos x - a$ или $\cos x = -2a$.

Последнее уравнение имеет на промежутке $(\pi/2; \pi]$ единственный корень при $-1 \leq -2a < 0$, откуда $0 < a \leq 0,5$. Подставив $\cos x = -2a$ в неравенство $\sin^2 x + 2 \cos x + a \geq 0$, получим $1 - 4a^2 - 4a + a \geq 0$, откуда $-1 \leq a \leq 0,25$.

В этом случае уравнение $\cos x = -2a$ при условии $\sin^2 x + 2 \cos x + a \geq 0$ имеет на промежутке $(\pi/2; \pi]$ единственный корень $x = \arccos(-2a)$ при $0 < a \leq 0,25$ и не имеет на промежутке $(\pi/2; \pi]$ корней при $a \leq 0$ и при $a > 0,25$.

Второй случай: $\sin^2 x + 2 \cos x + a < 0$. И т.д.



Ответ: $(-\infty; 0] \cup \left\{ \frac{1}{4} \right\}$.

Графически быстро, аналитически сложно

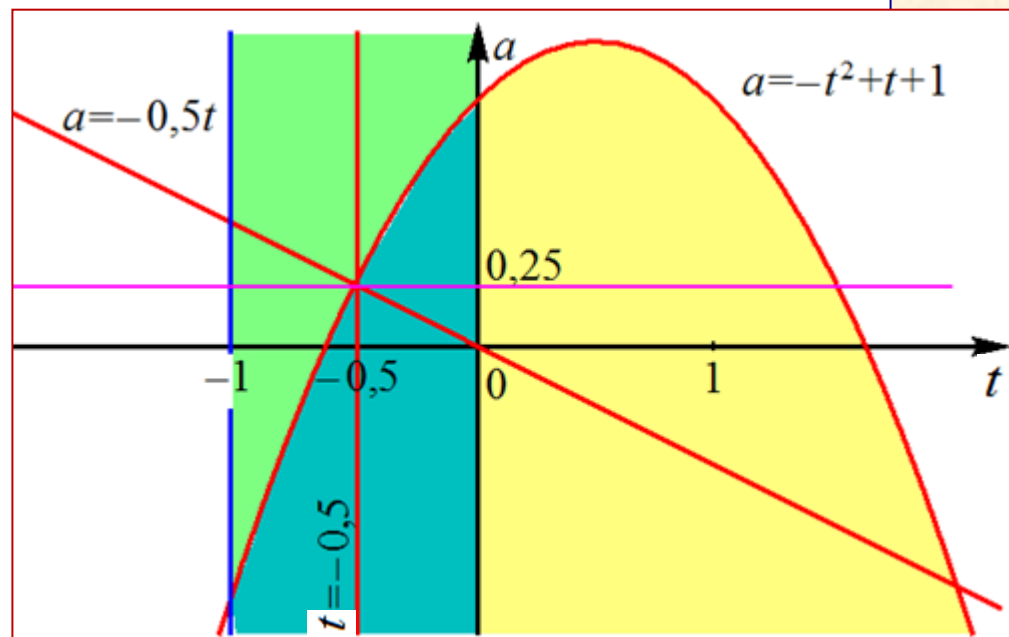
Решение (2-й способ). Пусть $\cos x = t$, тогда $\sin^2 x = 1 - t^2$. Каждому значению $(\pi/2; \pi]$ соответствует единственное значение $t \in [-1; 0)$ убывающей функции $t = \cos x$. Переформулируем задачу:

найти все значения a , при которых уравнение $|1 - t^2 + 2t + a| = 1 - t^2 + t - a$ имеет на промежутке $[-1; 0)$ единственный корень.

Получаем равносильную систему

$$\begin{cases} -1 \leq t < 0, \\ 1 - t^2 + t - a \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - t^2 + 2t + a = 1 - t^2 + t - a, \\ 1 - t^2 + 2t + a = -1 + t^2 - t + a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq t < 0, \\ a \leq -t^2 + t + 1, \\ a = -\frac{t}{2}, \\ t = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$



Ответ: $(-\infty; 0] \cup \left\{\frac{1}{4}\right\}$.

Печатные и электронные ресурсы

Школьные учебники.

Пособия для подготовки к ЕГЭ по математике.
Журналы «Математика в школе», «Математика
для школьников»,
«Математика», «Потенциал»

Сайты: alexlarin.net, abiturient.ru (МИЭТ),
mathus.ru/math/, reshuege.ru,
ege-ok.ru/category/zadachi-s-parametrom/

Контакты



Спасибо за внимание!

aaprokof@yandex.ru

12.12.14

